

**CORRECTION OF THE PROBLEM IN THE THEORY
OF SURFACES
CORRIGÉ DU PROBLÈME DE LA THÉORIE DES
SURFACES**

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

*Cordially dedicated to the memory of my Father who taught me arithmetic,
to my wife Wahida, my daughter Sinda, my son Mohamed Mazen and my
granddaughter Rayhane*

*A mon Cher Ami de math. Sup. et Spé. Lotfi CHAKROUN (Ancien Elève de
l'Ecole Polytechnique)*

Abstract. In this note, we present the correction of the problem from the theory of surfaces. The equations for the surface (Σ) were inspired by the monograph cited in the references, published by the eminent Japanese mathematicians Katsumi Nomizu and Takeshi Sasaki.

Résumé : Dans cette note, on présente le corrigé du problème de la théorie des surfaces. Les équations de la surface (Σ) ont été inspirées du monographe cité en références, publié par les éminents mathématiciens japonais Katsumi Nomizu et Takeshi Sasaki.

Keywords: Première forme fondamentale, seconde forme fondamentale, courbure moyenne, courbure totale, lignes géodésiques.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On définit une surface (Σ) par les équations :

$$M(u, v) \begin{cases} X = p(u).cosv \\ Y = p(u).sinv \\ Z = q(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2ct}} dt \end{cases}$$

avec $p(u) = \frac{e^{-cu}}{c}$, c une constante positive, $u > 0$.

1. Calculer les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$.
2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ) .
3. En déduire l'expression de ds^2 .
4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?
5. Peut-on transformer les coordonnées en coordonnées symétriques ?
6. Calculer un vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ de (Σ) .
7. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

8. Calculer les coefficients L, M et N .
9. En utilisant le cours, déterminer l'expression des courbures moyenne et totale.
10. Calculer les lignes géodésiques de (Σ) .

2. CORRECTION DU PROBLÈME

1. Les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$ sont :

$$\mathbf{OM}'_u \begin{cases} -e^{-cu} \cos v \\ -e^{-cu} \sin v \\ \sqrt{1 - e^{-2cu}} \end{cases}, \quad \mathbf{OM}'_v \begin{cases} -\frac{e^{-cu}}{c} \sin v \\ \frac{e^{-cu}}{c} \cos v \\ 0 \end{cases}$$

2. Les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ) sont :

$$(2.1) \quad \begin{cases} E = \|\mathbf{OM}'_u\|^2 = e^{-2cu}(\cos^2 v + \sin^2 v) + 1 - e^{-2cu} = 1 \\ F = \mathbf{OM}'_u \cdot \mathbf{OM}'_v = \frac{e^{-2cu}}{c} \cos v \sin v - \frac{e^{-2cu}}{c} \sin v \cos v = 0 \\ G = \|\mathbf{OM}'_v\|^2 = \frac{e^{-2cu}}{c^2}(\sin^2 v + \cos^2 v) = \frac{e^{-2cu}}{c^2} \end{cases}$$

3. Par suite : $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 = 1 \cdot du^2 + \frac{e^{-2cu}}{c^2} dv^2 = du^2 + \frac{1}{c^2 e^{2cu}} dv^2$.

4. Les coordonnées (u, v) sont orthogonales car $F = 0$ mais $E \neq G$ par suite non symétriques.

5. On peut transformer les coordonnées en coordonnées symétriques. Ecrivons ds^2 comme suit :

$$ds^2 = du^2 + \frac{1}{c^2 e^{2cu}} dv^2 = \frac{1}{c^2 e^{2cu}} (c^2 e^{2cu} du^2 + dv^2)$$

Faisons le changement de variables : $U = e^{cu} \implies dU = ce^{cu} du$, ds^2 devient :

$$ds^2 = \frac{1}{c^2 U^2} (dU^2 + dv^2)$$

Ainsi les coordonnées (U, v) sont orthogonales et symétriques.

6. Soit $\mathcal{N}$ le vecteur normal en un point de (Σ) :

(2.2)

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} -e^{-cu} \cos v \\ -e^{-cu} \sin v \\ \sqrt{1 - e^{-2cu}} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{e^{-cu}}{c} \sin v \\ \frac{e^{-cu}}{c} \cos v \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{e^{-cu} \sqrt{1 - e^{-2cu}}}{c} \cos v \\ -\frac{e^{-cu} \sqrt{1 - e^{-2cu}}}{c} \sin v \\ \frac{e^{-2cu}}{c} \end{vmatrix} \implies \|\mathcal{N}\|^2 = \frac{e^{-2cu}}{c^2}$$

D'où :

$$\|\mathcal{N}\| = \frac{e^{-cu}}{c}$$

Par suite, on obtient le vecteur unitaire normal n donné par :

$$n = \frac{\mathcal{N}}{\|\mathcal{N}\|} = \frac{c}{e^{-cu}} \begin{vmatrix} -\frac{e^{-cu}\sqrt{1-e^{-2cu}}}{c} \cos v \\ -\frac{e^{-cu}\sqrt{1-e^{-2cu}}}{c} \sin v \\ -\frac{e^{-2cu}}{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{1-e^{-2cu}} \cos v \\ -\sqrt{1-e^{-2cu}} \sin v \\ -e^{-cu} \end{vmatrix}$$

Le vecteur n est dirigé le point origine des axes du repère (O, X, Y, Z) .

7. Le calcul des vecteurs :

$$OM''_{uu}, \quad OM''_{uv}, \quad OM''_{vv}$$

donne :

$$OM''_{uu} = \begin{vmatrix} ce^{-cu} \cos v \\ ce^{-cu} \sin v \\ -\frac{c}{\sqrt{1-e^{-2cu}}} \end{vmatrix} \quad OM''_{uv} = \begin{vmatrix} e^{-cu} \sin v \\ -e^{-cu} \cos v \\ 0 \end{vmatrix} \quad OM''_{vv} = \begin{vmatrix} -\frac{e^{-cu}}{c} \cos v \\ \frac{e^{-cu}}{c} \sin v \\ 0 \end{vmatrix}$$

On pose :

$$L = n \cdot OM''_{uu}, \quad M = n \cdot OM''_{uv}, \quad N = n \cdot OM''_{vv}$$

8. Le calcul des coefficients L, M et N donne :

$$L = \frac{ce^{-3cu}}{\sqrt{1-e^{-2cu}}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{e^{-cu}}{c} \sqrt{1-e^{-2cu}}$$

9. Pour la première forme fondamentale ds^2 , on a déjà noté à la question 2. :

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-2cu}}{c^2} \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{e^{-2cu}} \end{pmatrix}$$

et de la deuxième forme fondamentale, par abus de notation, on note par Φ la matrice ci-dessous :

(2.3)

$$\Phi = \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ce^{-3cu}}{\sqrt{1-e^{-2cu}}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-cu}}{c}\sqrt{1-e^{-2cu}} \end{pmatrix}$$

Alors, on a la courbure totale K en un point de la surface (Σ) est égale au rapport des déterminants de ses deuxième et première formes fondamentales :

$$(2.4) \quad \boxed{K = \frac{\text{Dét}\Phi}{\text{Dét}g} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN}{EG} = \frac{c^2}{e^{2cu}}}$$

et la courbure moyenne H en un point d'une surface est égale à la trace de la matrice $g^{-1}.\Phi$ or :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} = g^{-1}.\Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{e^{-2cu}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{ce^{-3cu}}{\sqrt{1-e^{-2cu}}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-cu}}{c}\sqrt{1-e^{-2cu}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \mathcal{H} &= \begin{pmatrix} \frac{ce^{-3cu}}{\sqrt{1-e^{-2cu}}} & 0 \\ 0 & ce^{cu}\sqrt{1-e^{-2cu}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où H :

$$H = \text{Tr}(\mathcal{H}) = \frac{ce^{-3cu}}{\sqrt{1-e^{-2cu}}} + ce^{cu}\sqrt{1-e^{-2cu}} = \frac{c}{\sqrt{1-e^{-2cu}}}(e^{cu} + e^{-3cu} - e^{-cu})$$

10. Calculs des lignes géodésiques de (Σ) . Des relations (2.1), on obtient les équations :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial u} &= 2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \\
\frac{\partial E}{\partial v} &= 2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial G}{\partial u} &= 2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial G}{\partial v} &= 2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2}
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Soit (Γ) une courbe de (Σ) and $\mathbf{N}$ est le vecteur unitaire de la normale principale le long de (Γ) . Nous rappelons la définition de la ligne géodésique d'une surface donnée :

Definition 2.1. *Une courbe (Γ) est une ligne géodésique de la surface (S) si et seulement si les vecteurs $\mathbf{n}$ and $\mathbf{N}$ sont collinéaires [1].*

Calculons l'expression du vecteur $\mathbf{N}$, on obtient :

$$\mathbf{N} = R \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

mais :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \frac{dv}{ds}$$

Il s'ensuit :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$$

La condition $\mathbf{n} // \mathbf{N}$ peut être écrite :

$$\mathbf{N} \wedge \mathbf{n} = 0$$

par suite :

$$R \frac{d\mathbf{T}}{ds} \wedge \left(\frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}}{H} \right) = 0$$

Utilisant la formule du produit vectoriel :

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

on obtient :

$$\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} - \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \right) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = 0$$

Or $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$ forment une base du plan tangent en M , d'où les deux conditions :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} = 0$$

On obtient donc deux équations différentielles du second ordre :

(2.7)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 u}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 v}{ds^2} = 0$$

et :

(2.8)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 v}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 u}{ds^2} = 0$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} E'_u &= \frac{\partial E}{\partial u}; & E'_v &= \frac{\partial E}{\partial v}; & F'_u &= \frac{\partial F}{\partial u} \\ F'_v &= \frac{\partial F}{\partial v}; & G'_u &= \frac{\partial G}{\partial u}; & G'_v &= \frac{\partial G}{\partial v} \end{aligned}$$

et utilisons les équations (2.6), les 2 dernières équations (2.7-2.8) peuvent s'écrire sous la forme :

$$(2.9) \quad \boxed{\left(F'_u - \frac{E'_v}{2} \right) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 u}{ds^2} + G'_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{G'_v}{2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 v}{ds^2} = 0}$$

$$(2.10) \quad \boxed{\left(F'_v - \frac{G'_u}{2} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 v}{ds^2} + E'_v \frac{dv}{ds} \frac{du}{ds} + \frac{E'_u}{2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 u}{ds^2} = 0}$$

On remplace les valeurs des différents coefficients $E'_u, E'_v, \dots$, les 2 équations ci-dessus deviennent :

$$(2.11) \quad -2ce^{-2cu} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + e^{-2cu} \cdot \frac{d^2v}{ds^2} = 0$$

$$(2.12) \quad ce^{2cu} \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0$$

La Soukra, 08 Août 2026

RÉFÉRENCES

- [1] **A. Ben Hadj Salem.** 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés - Pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens.* Noor Publishing. 1^{ère} Edition, *ISBN* : 978 – 3 – 330 – 96843 – 1. 364p.
- [2] **K. Nomizu & T. Sasaki.** 1994. *Affine Differential Geometry* . Cambridge University Press 1994. Note : surfaces de Blaschke localement symétriques, pp 218-221.

Author's address: Abdelmajid Ben Hadj Salem, Résidence Bousten 8, Avenue Mosquée Raoudha, Bloc B, 2036 La Soukra, Tunisia, e-mail : abenhadj-salem@gmail.com